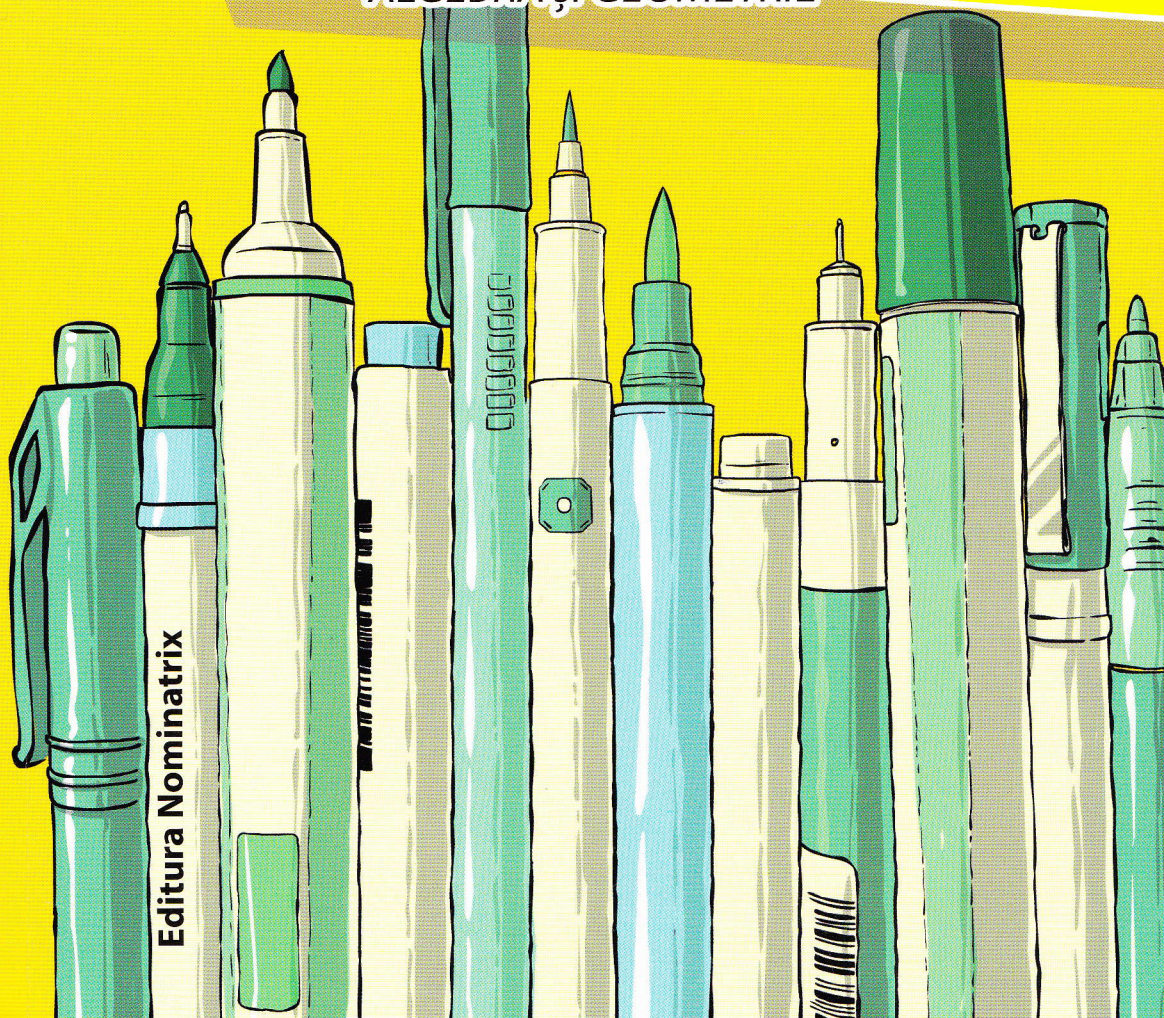




Ora de matematică

clasa a IX-a

ALGEBRĂ și GEOMETRIE





Petre Năchilă

Capitolul 1

ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ.

MULTIMI DE NUMERE

1.1. Multimi

Ora de matematică Algebră și geometrie

Clasa a IX-a

Operații cu mulțimi

1. reuniunea: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$

2. intersecția: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$

3. diferența: $A - B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$

4. complementara: dacă $A \subset E$, $C_A = E - A$

5. produs cartezian: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

Definiții. 3. Mulțimea părților unei mulțimi nevide A este mulțimea:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}.$$

4. Dacă A este o mulțime finită, numărul elementelor lui A se notează cu $\text{card } A$.

Teorema 1. Dacă $\text{card } A = n \in \mathbb{N}$, atunci $\text{card } \mathcal{P}(A) = 2^n$.

Teorema 2. Dacă $\text{card } A = m$, $\text{card } B = n$, $m, n \in \mathbb{N}$, atunci $\text{card } (A \times B) = mn$.

Teorema 3. Relația de incluziune are proprietățile:

a) reflexivă: $A \subset A$;

b) antisimetrică: $A \subset B, B \subset A \Rightarrow A = B$;

c) tranzitivă: $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

Teorema 4. Relația de egalitate are proprietățile:

a) reflexivitate: $A = A$;

b) simetrie: $A = B \Rightarrow B = A$;

c) transitivitate: $A = B, B = C \Rightarrow A = C$.

Editura NOMINATRIX

Cuprins

ALGEBRĂ

Capitolul 1. ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ. MULȚIMI DE NUMERE

1.1. Mulțimi	3
1.2. Mulțimile \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q}	6
1.3. Mulțimea \mathbb{R} . Ordonarea numerelor reale	9
1.4. Modulul unui număr real	14
1.5. Aproximări prin lipsă sau prin adaos	16
1.6. Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real	18
1.7. Intervale de numere reale	20
1.8. Inegalități uzuale	22
1.9. Propoziții. Operații logice cu propoziții. Formule de calcul propozițional	25
1.10. Predicate	27
1.11. Condiții necesare. Condiții suficiente. Teoreme	29
1.12. Metoda reducerii la absurd. Inducția matematică	32
1.13. Probleme de numărare	35
1.14. Teste de evaluare	37
1.15. Probleme pentru olimpiade și concursuri școlare	38

Capitolul 2. ȘIRURI DE NUMERE REALE

2.1. Moduri de definire a unui șir	40
2.2. Șiruri mărginite	42
2.3. Șiruri monotone	44
2.4. Progresii aritmetice	46
2.5. Progresii geometrice	49
2.6. Șiruri recurente	52
2.7. Teste de evaluare	54
2.8. Probleme pentru olimpiade și concursuri școlare	55

Capitolul 3. FUNCȚII

3.1. Produs cartezian. Reper cartezian	57
3.2. Graficul, imaginea, preimaginea și restricții ale unei funcții	59
3.3. Funcții mărginite. Funcții pare. Funcții impare	62
3.4. Simetria graficului unei funcții față de o dreaptă sau față de un punct din plan	64
3.5. Funcții periodice. Funcții monotone	65
3.6. Compunerea funcțiilor. Inversa unei funcții	68
3.7. Exemple particulare de funcții	69
3.8. Teste de evaluare	71
3.9. Probleme pentru olimpiade și concursuri școlare	72

Capitolul 4. FUNCȚIA DE GRADUL

4.1. Reprezentare grafică. Restricții	74
4.2. Ecuații de forma $ax + b = 0$; $a, b \in \mathbb{R}$	77
4.3. Monotonia și semnul funcției de gradul I.....	78
4.4. Inecuații de forma $ax + b \leq 0$ ($< 0, \geq 0, > 0$) pe \mathbb{R}	79
4.5. Pozițiile relative a două drepte în plan. Sisteme de ecuații liniare	81
4.6. Sisteme de inecuații de gradul I.....	84
4.7. Teste de evaluare	85

Capitolul 5. FUNCȚIA DE GRADUL AL DOILEA

5.1. Ecuații de gradul al doilea. Formulele lui Viète	86
5.2. Natura și semnul rădăcinilor ecuației $ax^2 + bx + c$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$	90
5.3. Funcția de gradul al doilea. Minim, maxim, axă de simetrie.....	93
5.4. Reprezentarea grafică a funcției de gradul al doilea.....	95

Capitolul 6. INTERPRETAREA GEOMETRICĂ A PROPRIETĂȚILOR ALGEBRICE ALE FUNCȚIEI DE GRADUL AL DOILEA

6.1. Monotonia și semnul funcției de gradul al doilea.....	98
6.2. Inecuații de forma $ax^2 + bx + c \leq 0$ ($> 0, \leq 0, < 0$), $a \neq 0$	100
6.3. Imagini și preimagini ale unor intervale pentru funcția de gradul al doilea...101	
6.4. Poziția unei drepte față de o parabolă.....	102
6.5. Rezolvarea în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a sistemelor de ecuații de forma $x + y = S$; $xy = P$ sau de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a'x^2 + b'x + c' = 0$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$	105
6.6. Sisteme simetrice și sisteme omogene de gradul al doilea	107
6.7. Teste de evaluare	108
6.8. Probleme pentru olimpiade și concursuri școlare	110

Capitolul 7. VECTORI ÎN PLAN

7.1. Segmente orientate. Relația de echipolență.....	112
7.2. Adunarea și scăderea vectorilor din plan.....	115
7.3. Înmulțirea vectorilor cu scalari. Coliniaritate.....	117
7.4. Descompunerea unui vector după doi vectori necoliniari și nenuli.....	120
7.4. Coliniaritate. Reper al unei drepte.....	122
7.6. Teste de evaluare	124
7.7. Probleme pentru olimpiade și concursuri școlare.....	125

Capitolul 8. COLINIARITATE, CONCURENȚĂ, PARALELISM

8.1. Reper cartezian. Coordonatele carteziene. Distanța dintre două puncte.....	126
8.2. Vectorul de poziție al unui punct din plan. Teorema lui Thales.....	128
8.3. Vectorul de poziție al centrului de greutate al unui triunghi	132
8.4. Teorema bisectoarei. Vectorul de poziție al cercului înscris într-un triunghi	134

8.5. Relația lui Sylvester. Concurența înălțimilor unui triunghi.....	137
8.6. Teorema lui Menelaus. Teorema lui Ceva.....	140
8.7. Teoreme clasice de geometrie	142
8.8. Teste de evaluare	145
8.9. Probleme pentru olimpiade și concursuri școlare	145

Capitolul 9 ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE

9.1. Rezolvarea triunghiului dreptunghic. Funcțiile trigonometrice ale unghiurilor ascuțite	151
9.2. Măsurarea unghiurilor și arcelor. Cercul trigonometric	154
9.3. Funcțiile trigonometrice sin și cos	157
9.4. Funcțiile trigonometrice tangentă și cotangentă	160
9.5. Reducerea la primul cadran. Exprimarea funcțiilor trigonometrice cu ajutorul uneia dintre ele. Graficele funcțiilor trigonometrice	162
9.6. Funcțiile trigonometrice ale sumei și diferenței de unghiuri	166
9.7. Funcțiile trigonometrice ale unghiului dublu, triplu, respectiv jumătății de unghi. Exprimarea funcțiilor trigonometrice cu ajutorul tangentei jumătății de unghi	168
9.8. Transformarea unor sume și diferențe de funcții trigonometrice în produse de funcții trigonometrice. Transformarea unor produse de funcții trigonometrice în sume sau diferențe de funcții trigonometrice	171
9.9. Identități condiționate. Inegalități	174
9.10. Teste de evaluare	176
9.11. Probleme pentru olimpiade și concursuri școlare	177

Capitolul 10 APLICAȚII ALE PRODUSULUI SCALAR ȘI TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIA PLANĂ

10.1. Produsul scalar a doi vectori.....	180
10.2. Teorema cosinusului. Teorema sinusurilor.....	188
10.3. Funcții trigonometrice și relații între elementele unui triunghi oarecare...190	
10.4. Rezolvarea triunghiului	192
10.5. Formule pentru aria triunghiului și razele cercurilor: circumscris, înscris, extins	193
10.6. Calculul unor distanțe între punctele remarcabile ale elementelor unui triunghi	195
10.7. Inegalități într-un triunghi	196
10.8. Teste de evaluare	197
10.9. Probleme pentru olimpiade și concursuri școlare	198

ALGEBRĂ

Capitolul 1 ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ. MULTIMI DE NUMERE

1.1. Mulțimi

Mulțimea este o colecție de obiecte distincte. Obiectele mulțimii se numesc elemente. Mulțimile se notează cu literele mari ale alfabetului. O mulțime poate fi dată prin enumerarea elementelor sale sau specificând anumite proprietăți pe care le au doar aceste elemente. Dacă a aparține A , notăm $a \in A$. În caz contrar $a \notin A$.

Definiții. 1. incluziunea: $A \subset B$ dacă pentru orice element $a \in A$ avem $a \in B$;

2. egalitatea: $A = B$ dacă $A \subset B$ și $B \subset A$.

Operații cu mulțimi

1. reuniunea: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$

2. intersecția: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$

3. diferența: $A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$

4. complementara: dacă $A \subset E$, $C_E A = E - A$

5. produs cartezian: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

Definiții. 3. Mulțimea părților unei mulțimi nevide A este mulțimea:

$$P(A) = \{X \mid X \subset A\}.$$

4. Dacă A este o mulțime finită, numărul elementelor lui A se numește *cardinalul* mulțimii A (notat cu $\text{card } A$).

Teorema 1. Dacă $\text{card } A = n \in \mathbb{N}$, atunci $\text{card } P(A) = 2^n$.

Teorema 2. Dacă $\text{card } A = m$, $\text{card } B = n$, $m, n \in \mathbb{N}$, atunci $\text{card } (A \times B) = mn$.

Teorema 3. Relația de incluziune are proprietățile:

a) reflexivă: $A \subset A$;

b) antisimetrică: $A \subset B, B \subset A \Rightarrow A = B$;

c) tranzitivă: $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

Teorema 4. Relația de egalitate are proprietățile:

a) reflexivitate: $A = A$;

b) simetrie: $A = B \Rightarrow B = A$;

c) tranzitivă: $A = B, B = C \Rightarrow A = C$.

PROBLEME PROPUSE

1. Operațiile cu mulțimi au următoarele proprietăți:
 - a) comutativitatea: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$;
 - b) asociativitate: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
 - c) independență: $A \cap A = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$;
 $A \cup \emptyset = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$.
 - d) distributivitatea reuniunii (intersecției) față de intersecție (reuniune):
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
 - e) reuniunea (intersecția) are proprietatea de absorbție față de intersecție (reuniune):
 $A \cap (A \cup B) = A$;
 $A \cup (A \cap B) = A$.
 - f) pentru orice mulțime $B \subset A$ avem $A \cup B = A$; $A \cap B = B$.
 - g) Legile lui Morgan: pentru orice $A \subset E$, $B \subset E$ avem $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$;
 $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$.
 - h) Dacă $A \subset E$, avem $C_E(C_E A) = A$; $C_E E = \emptyset$, $C_E \emptyset = E$.
 - i) Produsul cartezian este distributiv față de intersecție, reuniune, diferență:
 $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$; $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
 $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$; $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;
 $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$; $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.
 - j) $\text{card}(A \cup B) = \text{card} A + \text{card} B - \text{card}(A \cap B)$.
2. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$. Determinați două mulțimi B și C cu proprietățile $B \cup C = A$, $B \cap C = \emptyset$, suma elementelor lui B este egală cu suma elementelor lui C în cazurile:
 - a) $\text{card} B = 6$; $\text{card} C = 14$;
 - b) $\text{card} B = 7$, $\text{card} C = 13$.
3. Determinați mulțimile A formate din trei numere naturale știind că pentru orice $x, y \in A$, $x \geq y$, avem $1 + x - y \in A$.
4. Determinați mulțimile A formate din 4 numere naturale știind că pentru orice $x, y \in A$, $x \geq y$, avem $1 + x - y \in A$.
5. Fie mulțimea $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, unde $n \in \{5, 6, 8, 9\}$. Demonstrați că există mulțimile $B_n, C_n, D_n \subset A_n$, disjuncte două câte două astfel încât $s(B_n) = s(C_n) = s(D_n)$, unde $s(M)$ este suma elementelor lui M .
6. Fie $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, unde $n \in \{5, 6, 8, 9\}$. Determinați cel mai mic element al mulțimii A_n astfel încât $S(A_n) = 36$.
7. Determinați cel mai mic număr de numere care trebuie scoase din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$ astfel încât mulțimea rămasă să poată fi împărțită în două submulțimi disjuncte B și C în care produsele elementelor lor să fie numere egale.

8. Dați exemplul de trei mulțimi A, B și C cu proprietățile $A = B \cup C, B \cap C = \emptyset$, card $B = 3, p(B) = p(C)$, unde $p(M)$ înseamnă produsul elementelor lui M .

9. Rezolvați problema 8 în cazul $A = \{1, 2, 3, \dots, 35\}$.

10. Așezați pe un cerc toate numerele de la 1 la 16 astfel încât suma oricăror două numere vecine să fie număr prim.

11. Determinați mulțimile A, B, C dacă:

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b) $A - (A \cap B) = \{6\}$; c) $B - (B \cap A) = \{1, 3\}$.

12. Determinați mulțimile A, B, C dacă:

a) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; b) $A \cap B = \emptyset$;
c) $C \subset B$; d) $A - C = \{1, 3, 7\}$; e) $B - C = \{5, 9\}$.

13. Rezolvați următoarele ecuații:

a) $\{1, 2\} \cup x = \{1, 2, 3\}$; b) $(A - x) \cup (x - A) = \{1, 2, 3\}$, unde $A = \{1, 2\}$;
c) $(A - x) \cup (x - A) = \{1, 4, 5\}$, unde $A = \{1, 2, 3\}$.

14. Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$ și mulțimile $A = \{2a + 2\}, B = \{b, 2a + 1\}$. În ce condiții avem:

a) card $(A \cup B) = 2$; b) card $(A \cup B) = 3$; c) card $(A \cup B) = 4$.

15. Fie mulțimea $A \subset \mathbb{N}$, având proprietățile:

i) $2 \in A, 3 \in A$; ii) $x \in A \Rightarrow 3x - 1 \in A$; iii) $x + 1 \in A \Rightarrow x \in A$

a) Determinați încă 5 elemente din A .

b) Determinați A .

16. Determinați card $(A \cap B)$ dacă:

card $(A \cup B) = 201$; card $(A - B) = 100$ și card $(B - A) = 96$.

17. Determinați card A în cazurile:

a) $A = \left\{ a \in \mathbb{N}^* \mid \frac{b}{a} = n^2, n \in \mathbb{N} \right\}$, unde $b = (2^2 - 1)(3^2 - 1) \dots (99^2 - 1)$;

b) $A = \left\{ \overline{ab} \mid \overline{0, aa(b)} + \overline{0, bb(a)} = (0, (6))^2 \right\}$;

c) $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 13 \text{ divide pe } 2^n + 3^n\}$;

d) $A = B \cap \mathbb{N}$, unde $B = \left\{ \frac{3n+1}{4}, \frac{3n+2}{4}, \frac{n}{8}, \frac{3n+1}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{4} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$

18. Fie mulțimile $A_n = \left\{ \frac{n-1}{n} + \frac{kn}{n+1} \mid k \in \mathbb{N} \right\}, n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că intersecția mulțimilor A_n este \emptyset .

19. Determinați $x \in \mathbb{R}$, știind că $\frac{n}{n+1} < x < \frac{2n+1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

1.2. Mulțimile \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q}

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Rezolvarea unor ecuații de forma $a + x = b$, $a > b$, a dus la considerarea mulțimii $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Rezolvarea unor ecuații de forma $bx = a$, $a, b \in \mathbb{Z}$, cu $(a, b) \neq 1$, a condus la considerarea mulțimii $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$.

Definiția 1. Frațiile $\frac{a}{b}, \frac{a}{d}$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, se numesc echivalente dacă $ad = bc$. Mulțimea tuturor fracțiilor lor echivalente cu o fracție dată, se numește număr rațional. Avem $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Teorema 1. Adunarea și înmulțirea pe mulțimile \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} au proprietățile:

- 1) comutativitate: $a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$;
- 2) asociativitate: $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(ab) \cdot c = a \cdot (bc)$;
- 3) 0 este element neutru pentru adunare: $a + 0 = 0 + a = a$;
- 4) 1 este element neutru pentru înmulțire: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;
- 5) orice element $a \in \mathbb{Q}$ sau $a \in \mathbb{Z}$ are un opus (notat ca $-a$): $a + (-a) = 0$;
- 6) orice element $a \in \mathbb{Q}^*$ are un invers (notat cu a^{-1} sau $\frac{1}{a}$): $a \cdot a^{-1} = 1$;
- 7) înmulțirea este distributivă față de adunare: $a \cdot (b + c) = ab + ac$.

Observații:

- a) În \mathbb{N} doar 0 are opus (pe 0).
- b) În \mathbb{N} un singur element este inversabil (1). Inversul lui 1 este 1.
- c) În \mathbb{Z} , elementele inversabile sunt 1 și -1 . Avem $(-1)^{-1} = 1$.

Definiția 2. Spunem că $a \geq b$ dacă există $c \geq 0$ astfel încât $a = b + c$; spunem că $a > b$ dacă există $c > 0$ astfel încât $a = b + c$.

- 8) Trichotomie. Pentru orice $a, b \in \mathbb{Q}$ avem $a > b$ sau $a = b$ sau $b > a$;
- 9) Axioma lui Arhimede. Pentru orice două numere naturale a, b , $a > 0$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a \cdot n > b$ (se ia $n = \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor + 1$)

- Orice fracție ordinară se transformă în fracție zecimală aplicând algoritmul de împărțire a numerelor naturale;
- fracție zecimală periodică simplă ($a_0 \in \mathbb{N}$, a_1, a_2, \dots, a_n cifre)

$$a_0, (a_1, a_2, \dots, a_n) = a_0 + \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{\underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ cifre}}}$$